Многокритериальность в многорежимных системах

Сушков Ю.А.
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург

Наличие нескольких режимов работы многорежимной (многофункциональной) системы и необходимость выполнения ряда требований для каждого режима работы в отдельности естественным образом приводят к многокритериальным задачам синтеза таких систем.

Пусть $\bar{R} = \{R_1 | i \in 1 : r\}$ – множество возможных режимов многорежимной системы (МРС), а $\bar{L} = \{L_j | j \in 1 : l\}$ – множество функций (работ, задач и т. п.), которые должны выполняться системой. Предположим, что для любого режима $R_i, \quad i \in 1 : r$, можно указать действительное число $\sigma[i, j], \quad j \in 1 : l$, означающее степень приспособленности МРС к выполнению функции L_j на i-м режиме. Тогда в простейшем случае задачу синтеза МРС можно сформулировать следующим образом: найти такое отображение φ множества функций $\bar{L}$ в множество возможных режимов $\bar{R}$, чтобы, во-первых, соответствующие коэффициенты $\sigma[\varphi i, j]$ были как можно больше, а число используемых режимов из $\bar{R}$ – как можно меньше (здесь и далее предполагается, что отображение φ действует из множества индексов функций в множество индексов режимов, т. е. $\varphi : (1 : l) \to (1 : e)$).

Приведем некоторые примеры. Пусть МРС представляет собой механизм перемены передач (механическую коробку передач), Y_i – передаточное отношение механизма на i-м режиме, $\bar{L}$ – множество заданных значений передач, которые должны реализовываться механизмом, $\sigma[i, j]$ – расстояние между полученной передачей Y_i и L_j. Тогда в данном случае необходимо найти такое отображение φ, при котором множество $\bar{L}$ воспроизводилось имеющимися передаточными отношениями $\{Y_i | i \in 1 : m\}$ как можно точнее (т. е. расстояния $\sigma[\varphi i, j]$ были бы как можно меньше), а число используемых режимов, равное $|\varphi(1 : l)|$, как можно меньше.

Теперь пусть Y_i, – множество задач, которые может решать вычислительное устройство в i-м режиме настройки, а $\Im$ – множество задач, подлежащих решению. В качестве $\sigma[i, j]$ выберем время решения задачи L_i в i-м режиме настройки. Необходимо минимизировать как время решения каждой задачи, так и число используемых режимов.

Известные постановки многокритериальных задач отличаются от изложенной здесь тем, что в результате решения, если пользоваться нашей терминологией, должен быть найден единственный режим работы системы, в наилучшей степень удовлетворяющий всем поставленным задачам из $\Im$. В нашем же случае число режимов является оптимизируемым параметром. Другими словами, речь идет не об одном, а о множестве режимов, наилучшим образом соответствующих поставленным требованиям.

По-видимому, решение многокритериальных задач так или иначе должно быть связано с созданием методов, учитывающих возможность использования диалогового взаимодействия ЭВМ и лица, принимающего решение (ЛПР). Это объясняется тем, что многокритериальные задачи возникают в основном при наличии неопределенности в постановке задачи, при отсутствии необходимой информации об исследуемой конкретной системе. Последнюю достаточно эффективно получать и тем самым уточнять свое представление о системе можно с помощью диалогового режима.

Рассмотрим матрицу коэффициентов $\sigma[1 : r, 1 : l]$. Будем считать, что множество соответствующих режимов образует паретовское множество.

Не рассматривая пока вопросы построения паретовского множества режимов, перейдем непосредственно к описанию диалоговой процедуры поиска рациональных решений поставленной многокритериальной задачи. С этой целью преобразуем матрицу $\sigma[1 : r, 1 : l]$ в ранжированную таблицу, которую будем называть *рабочей*.

Для построения рабочей таблицы упорядочим элементы каждого столбца матрицы в порядке возрастания. Пусть δ_j – перестановка на множестве $1 : r$, порожденная ранжированием j-го столбца матрицы. Тогда в рабочей таблице на месте пересечения i-й строки и j-го столбца должен стоять элемент $\sigma[\delta_j i, j]$.Для усиления информативности удобно в клетке рабочей таблицы вместе с числом $\sigma[\delta_j i, j]$ проставлять еще номер строки i, в которой находилось это число в первоначальной матрице. Рабочая таблица является основным объектом, с которым при общении с ЭВМ работает ЛПР. Опишем примерный порядок работы с рабочей таблицей.

Предположим, что $\gamma[j]$ означает такое самое высокое значение коэффициентов $\sigma[1 : r, j]$, выше которого, по мнению ЛПР, на данном этапе диалога этот коэффициент принимать не может. Вектор $\gamma[1 : l]$ будем называть границей и обозначать буквой Γ. Введем еще обозначение $G_j(\Gamma) = \{i | i \in 1 : r, \sigma[i, j] \geq \gamma[j]\}$. Назовем множество $G(\Gamma)$ покрывающим для семейства $\{G_j(\Gamma) | j \in 1 : l\}$, если для любого $j \in 1 : l$ существует такое $i \in G(\Gamma)$, что $i \in G_j(\Gamma)$. Ясно, что если существует для данной границы Γ покрывающее множество $G(\Gamma)$, то множество режимов $\bar{R}(\Gamma) = \{R_i | i \in G(\Gamma)\}$ решает поставленное множество задач $\bar{L}$. Задача ЛПР состоит, с одной стороны, в постепенном изменении границы Γ в нужную сторону, а с другой – в уменьшении мощности покрывающего множества $G(\Gamma)$. В частности, если для всех $j \in 1 : l$ существует $i \in G_j(\Gamma)$, то это означает, что все заданные функции из $\bar{L}$ можно выполнить с помощью лишь одного режима R_i. Этот единственный элемент и будет представлять одноэлементное покрывающее множество $G(\Gamma)$.

При исследовании рабочей таблицы ЛПР, исходя из опыта, интуиции или каких-то других привходящих факторов, может назвать какую-то границу Γ, а затем обратиться к программе поиска покрывающего множества $G(\Gamma)$. В общем случае их может быть несколько. Предположим, что ЛПР при этом требует выполнения неравенства $|G(\Gamma)| \leq \alpha$, т. е. считается, что для решения задач из $\bar{L}$ можно использовать не более чем α режимов. Если при этих условиях количество покрывающих множеств оказалось достаточно большим (например, более пяти-семи), то можно предположить, что ограничения Γ были заданы слабыми и их следует усилить. В связи с этим ЛПР может вновь вернуться к рабочей таблице и изменить границу в сторону уменьшения значений коэффициентов $\sigma[i,j]$. Такое действие, очевидно, не увеличивает число покрывающих множеств, и потому, повторяя его неоднократно, в конечном счете получим требуемое количество покрытий. Каждое из них определяет вариант решения многокритериальной задачи.

Возможна и обратная картина, т. е. граница Γ уже с самого начала оказывается слишком жесткой, и после обращения к программе поиска покрывающих множеств обнаруживается их полное отсутствие при $|G(\Gamma)| \leq \alpha$. В этом случае либо необходимо увеличить число α, либо изменить границу Γ в сторону увеличения коэффициентов $\sigma[i,j]$.

Проиллюстрируем сказанное примером.

Пусть матрица $\sigma[1:r, 1:l] = \sigma[1:7, 1:4]$ имеет вид

	L_1	L_2	L_3	L_4
R_1	0.1	0.8	0.2	0.4
R_2	0.7	0.7	0.6	0.5
R_3	0.4	0.9	0.8	0.6
R_4	0.3	0.1	0.9	0.1
R_5	0.7	0.2	0.2	0.7
R_6	0.5	0.8	0.1	0.1
R_7	0.9	0.7	0.1	0.9

Непосредственной проверкой убеждаемся, что записанное множество строк является эффективным. Строим рабочую таблицу. Для этого упорядочиваем по возрастанию числа каждого столбца:

L_1	L_2	L_3	L_4;
0.1; 1	0.1; 4	0.1; 6	0.1; 4
0.3; 4	0.2; 5	0.1; 7	0.1; 6
0.4; 3	0.7; 2	0.2; 1	0.4; 1
0.5; 6	0.7; 7	0.2; 5	0.5; 2
0.7; 2	0.8; 1	0.6; 2	0.6; 3
0.7; 5	0.8; 6	0.8; 3	0.7; 5
0.9; 7	0.9; 3	0.9; 4	0.9; 7

Здесь пара $\langle 0,7; 2\rangle$ в третьей строке, например, означает, что в матрице на пересечении второй строки и второго столбца стоит число $0,7$.

Предположим, что мы хотим получить не менее двух покрывающих множеств (двух вариантов решения), причем $\alpha = 2$.

Выберем, например, такую границу $\Gamma = \langle 0,7; 0,8; 0,2; 0,4\rangle$. В этом случае $G_1(\Gamma_1) = 1:6\backslash 7$, $G_2(\Gamma_1) = \{1,2,4,5,6,7\}$, $G_3(\Gamma_1) = \{1,5,6,7\}$, $G_4(\Gamma_1) = \{1,4,6\}$. Отсюда сразу находим, что $\cap_{j \in 1:4} G_j(\Gamma_1) = \{1, 6\}$ Таким образом, имеем два покрывающих множества $G(\Gamma_1) = 1$ и $G(\Gamma_1) = 6$, т.е. получены два одноэлементных покрывающих множества. Другими словами, для заданных ограничений Γ_1 существуют два режима R_1 и R_6, каждого из которых достаточно, чтобы выполнить все поставленные задачи. Так как вначале априори допускается $\alpha = 2$, то можно сделать предположение о возможности ужесточения границы.

Предположим, что новая граница равна $\Gamma_2 = \langle 0,5; 0,7; 0,2; 0,4 \rangle$, т.е. более жесткие требования наложены на выполнение двух первых функций. Так как в $G_2(\Gamma_2)$ отсутствуют элементы 1 и 6, то из предыдущего становится ясно, что $G(\Gamma_2)$ не может быть одноэлементным. Однако существует 10 двухэлементных покрывающих множеств: $\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}$. Такое количество возможных решений также говорит о том, что граница Γ_2 не сильно сужает множество допустимых вариантов. Введем еще более жесткую границу $\Gamma_3 = \langle 0,4; 0,7; 0,2; 0,1 \rangle$. Так как из $G_1(\Gamma_2)$ исключается 6, а из $G_4(\Gamma_2) - 1$, то понятно, что из полученных ранее двухэлементных покрывающих множеств останутся только те, которые не содержат 1 или 6: $\{4, 5\}, \{4, 7\}$; другими словами, граница Γ_3 определяет два возможных варианта: либо выполнять функции из $\bar{L}$ с помощью режимов R_4 и R_5 либо с помощью R_4, R_7. Отметим, что если ввести новую границу, повысив ее на 1 клетку для $j = 2, 3$, то в том случае уже не найдется ни одного двухэлементного покрывающего множества. Понятно также, что максимальное число элементов в покрывающем множестве не может превышать величины 1 (в нашем примере $l = 4$).

Дальнейшее обобщение постановки задачи, имеющее важное практическое значение, состоит в том, чтобы учесть в диалоговой процедуре зависимость работы системы на различных режимах от ее конструктивных параметров.

Пусть h - вектор параметров и коэффициенты $\sigma[i, j]$ зависят от этих параметров. Предполагается, что эта зависимость известна и коэффициенты $\sigma[i, j]$ могут быть подсчитаны, если известно некоторое значение $h[k]$. Выберем некоторое множество значений конструктивных параметров $h[1 : n]$. Тогда для каждого значения $h[k]$ можно построить соответствующую матрицу коэффициентов $\sigma[k, 1 : r, 1 : l]$. Учитывая, что $k \in 1 : n$, получаем уже трехмерную $\sigma[1 : n, 1 : r, 1 : l]$. Так как работать с ней неудобно, представим трехмерную матрицу как последовательность двумерных $\sigma[k, 1 : r, 1 : l]$, записанных друг под другом в порядке возрастания k. В этой двумерной матрице каждая строка будет обозначаться парой чисел $\langle k, i \rangle \in (1 : n) \times (1 : r)$ – номером значения параметра $k \in 1 : n$ и номером режима $i \in 1 : m$. Далее предполагаем, что в полученной двумерной матрице $[\sigma(1 : n) \times (1 : m), 1 : l]$ множество всех строк эффективное.

Теперь диалоговую процедуру по поиску решений можно проводить аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае. Отличие состоит лишь в поиске покрывающих множеств при задании границы Γ.

Дело в том, что теперь покрывающее множество $G(\Gamma)$ есть множество пар вида $\langle k, i \rangle$.

Поэтому при построении рабочей таблицы рядом с каждым числом $\sigma[\langle k, i\rangle, j]$ необходимо записывать пару индексов. Кроме того, во всех парах выбранного покрывающего множества первый индекс должен встречаться только один раз (конструктивный параметр для всех режимов должен быть одним и тем же), а число различных вторых индексов, встречающихся в выбранных парах, не может превосходить α. Отсюда видно, что такое обобщение задачи принципиальных трудностей в проведении диалоговой процедуры не вызывает.

В общем случае можно рассматривать задачу, в которой строкам матриц соответствуют не пары индексов, а вектора $\langle h^1, ..., h^t\rangle$, причем для каждой компоненты этого вектора задано число a^s, $s \in 1 : t$, определяющее, сколько раз может встречаться соответствующий индекс из $1 : t$ в покрывающем множестве элементов из $(1 : n_1) \times ... \times (1 : n_t)$, где $1 : n_s$ – множество значений, которые может принимать параметр h^s.